Visit QB365-SLMS - https://www.qb365.in/slms/ Complete Questions and Answers

Answers Key:

III . ANSWER THE ANY 5 QUESTIONS.

1. $(2+i\sqrt{3})^{10}-(2-i\sqrt{3})^{10}$
   இப்பொழுது $\bar{z}=\overline{(2+i\sqrt{3})^{10}-(2-i\sqrt{3})^{10}}$
   $\bar{z}=\overline{(2+i\sqrt{3})^{10}}-(2-i\sqrt{3})^{10}\ [\because \overline{z_1-z_2}=\bar{z_1}-\bar{z_2}]$
   $=(2-i\sqrt{3})^{10}-(2+i\sqrt{3})^{10}$
   $=-[(2+i\sqrt{3})^{10}-(2-i\sqrt{3})^{10}]=-z$
   $\therefore \bar{z}=-z \Rightarrow z$ முழுவதும் கற்பனை எண்
   எனவே $(2+i\sqrt{3})^{10}-(2-i\sqrt{3})^{10}$ முழுவதும் கற்பனை எண்.
2. கொள்கை $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r \Rightarrow z_1\bar{z_1}=z_2\bar{z_2}=z_3\bar{z_3}=r^2$
   $\Rightarrow z_1=\frac{r^2}{\bar{z_1}}, z_2=\frac{r^2}{\bar{z_2}}, z_3=\frac{r^2}{\bar{z_3}}$
   ஆகவே, $z_1+z_2+z_3=\frac{r^2}{\bar{z_1}}+\frac{r^2}{\bar{z_2}}+\frac{r^2}{\bar{z_3}}$
   $=r^2\left(\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right)$
   $|z_1+z_2+z_3|=\left|r^2\right|\left|\frac{\overline{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}}{z_1+z_2+z_3}\right|\ (\because \bar{z_1}+\bar{z_2}=\overline{z_1+z_2})$
   $=r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|}\ (\because |z|\,|\bar{z}|$ மற்றும் $|z_1z_2z_3|=|z_1|\,|z_2|\,|z_3|)$
   $|z_1+z_2+z_3|=r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r^3}=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r}$
   $\Rightarrow \frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1+z_2+z_3|}=r$ (கொள்கையின் படி $z_1+z_2+z_3\neq 0$)
   எனவே, $\left|\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$
3. (i) $\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
   கொடுக்கப்பட்ட $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$
   ∴ $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$
   $\Rightarrow(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos\gamma+i\sin\gamma)=0$
   $\Rightarrow a+b+c=0$ இங்கு $a=\cos\alpha+i\sin\alpha, b=\cos\beta+i\sin\beta, c=\cos\gamma+i\sin\gamma$
   $a+b+c=0$ எனில் $a^3+b^3+c^3=3abc$.
   $\therefore(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3+(\cos\beta+i\sin\beta)^3+(\cos\gamma+i\sin\gamma)^3=3[(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos\gamma+i\sin\gamma)]$
   டி மாய்வரின் தேற்றப்படி,
   $\Rightarrow\cos3\alpha+i\sin3\alpha+\cos3\beta+i\sin3\beta+\cos3\gamma+i\sin3\gamma$
   $=3[(\cos(\alpha+\beta+\gamma)i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$
   $\Rightarrow(\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma)+i[\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\gamma)]$
   $=3[(\cos(\alpha+\beta+\gamma)i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$
   மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த கிடைப்பது.
   $\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
   மற்றும் $\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
   எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.
4. $z^3+8i=0$ என்க.
   $\Rightarrow z^3=-8i$
   $=8(-i)=8\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+isin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$, $k\in Z$ எனவே,
   $z=\sqrt[3]{8}\left(cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)\right)$, $k=0,1,2$.
   $k=0,1,2$ எனப் பிரதியிட
   $k=0, z=2(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right))=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$
   $k=1, z=2\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2=2(0+i)=0+2i=2i$
   $k=2, z=2\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=2\left(cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$
   $=2\left(-cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$
   z-ன் மதிப்புகள் $=\sqrt{3}-i, 2i$, மற்றும் $-\sqrt{3}-i$
5. LHS $=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots(1+\omega^{2^{11}})$
   $=(1+\omega^0)^6(1+\omega^{21})(1+\omega^{22})(1+\omega^{23})\ldots(1+\omega^{2^{11}})$
   $[\because \omega^4=\omega^3.\omega\ \omega^8=\omega^6.\omega^2]$
   12 உறுப்புகள் உள்ளன.
   $=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^{21})\ldots$. 12 உறுப்புகள்
   $=(1+\omega)^6(1+\omega^2)^6(-\omega)^6(-\omega^2)^6$
   $=(\omega^3)^6=1.1\ldots.6=1$ RHS எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.
6. $\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{31}$
   $-\sqrt{3}+3i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்க.
   $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
   $\alpha=tan^{-1}\left|\frac{3}{-\sqrt{3}}\right|=tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
   $\theta=\pi-a=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\ (\because -\sqrt{3}+3i$ ஆனது II-ஆம் கால் பகுதியில் உள்ளதால்)
   ஆகவே, $-\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)$
   இருபுறமும் 31-ன் அடுக்கிற்கு உயர்த்த,

$(-\sqrt{3}+3i)^{31} = (2\sqrt{3})^{31}\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)^{31}$

$=(2\sqrt{3})^{31}\left(cos\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+isin\left(20\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= (2\sqrt{3})^{31}\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= (2\sqrt{3})^{31}\left(cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= (2\sqrt{3})^{31}\left(-cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right) = (2\sqrt{3})^{31}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

II . ANSWER THE ALL QUESTIONS.

7. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$

மேலும் $\frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

எனவே, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = i^3 - (-i)^3$ = -i - i =- 2i

8. கொடுக்கப்பட்ட $|z_1| = |z_2| = 1$

$\Rightarrow z_1\bar{z} = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1}$

மற்றும் $z_1z_2 \neq -1$ மேலும் $z_2\overline{z_2} = 1$

$\Rightarrow z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2}$

கருதுக $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

$\therefore \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{\frac{1}{\bar{z}_1}+\frac{1}{\bar{z}_2}}{1+\frac{1}{\bar{z}_1}\cdot\frac{1}{\bar{z}_2}} = \frac{\frac{\bar{z}_2+\bar{z}_1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}}{\frac{\bar{z}_1\bar{z}_2+1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}}$

$= \frac{\bar{z}_2+\bar{z}_1}{\bar{z}_1\bar{z}_2+1} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}$

$= \left(\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}\right)$

$\therefore \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ மெய் [$\because z = \bar{z} \Rightarrow$ என்பது மெய்]

9. i) $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2).....(x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$.

இருபுறமும் மட்டு மதிப்பு காண கிடைப்பது

$\Rightarrow |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)(x_n + iy_n)| = |a + ib|$

$\Rightarrow |x_1 + iy_1||x_2 + iy_2| ... |x_n + iy_n| = |a + ib|$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}...\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த கிடைப்பது.

$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2).....(x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$.

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

ii) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) ... (x_n + iy_n) = a + ib$

$\arg((x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) ... (x_n + iy_n)) = \arg(a + ib)$

$\Rightarrow \arg(x_1 + iy_1) + \arg(x_2 + iy_2) + ... + \arg(x_n + iy_n)) = \arg(a + ib)$

($\because \arg(z_1z_2...z_3) = \arg z_1 + \arg z_2 + ... + \arg z_n$)

$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + ... + tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$

$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} tan\left(\frac{y_r}{x_r}\right) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi, k\epsilon Z$

10. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = r(cos\theta + isin\theta)$

$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ முதலாம் கால்பகுதியில் அமைவதால், $\theta = \alpha$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 = 1^2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)^5$

$= cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}$ ...(1) [டி மாய்வரின் தேற்றம்]

அதைப் போல $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = 1\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = 1^2\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right)^5$

$= cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) ஐ கூட்ட கிடைப்பது,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + \cancel{i\sin\frac{5\pi}{6}} + \cos\frac{5\pi}{6} - \cancel{i\sin\frac{5\pi}{6}}$

$= 2cos\frac{5\pi}{6} = 2cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -2cos\frac{\pi}{6}$ [$\therefore \frac{5\pi}{6}$ இரண்டாம் காலப்பகுதியில் அமைவதால்]

$-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

11. $\frac{cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}}{2(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{cos(-\frac{\pi}{6})+isin(-\frac{\pi}{6})}{cos(\frac{\pi}{3})+isin(\frac{\pi}{3})}\right)$

[$\because cos(-\theta) = cos\theta$ and $sin(-\theta) = sin\theta$]

$= \frac{1}{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{-\pi-2\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{-\pi-2\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{-3\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$

QB 365 Study Material
QUESTION BANK 365

$= \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$
$= \frac{1}{2}[0 - i(1)] = \frac{-i}{2}$

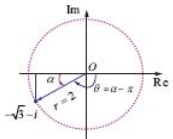
I. ANSWER THE ALL QUESTIONS.

12. z = (2 +3i)(1 – i) = (2 + 3)+ (3 – 2)i = 5 + i
$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+i}$
தொகுதி மற்றும் பகுதியை பகுதியின் இணை எண்ணால் பெருக்க
$z^{-1} = \frac{(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{5-i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}$
$\Rightarrow z^{-1} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}$

13. $7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$ எனக் கொடுக்கப்பட்டது
$|z + 6 - 8i| \leq |z| + |6 - 8i|$ [முக்கோணச் சமனிலி]
$\leq 3\sqrt{6^2 + (-8)^2} \leq 3 + \sqrt{36 + 64} \leq 3\sqrt{1w}$
$|z + 6 - 8i| \leq 3 + 10 \leq 13$ ...(1)
மேலும் $|z + 6 - 8i| \geq |z| - |6 - 8i| \geq \left|3\sqrt{6^2 + (-8)^2}\right|$
$\geq \left|3 - \sqrt{36 + 84}\right| \geq |3 - 10| \geq |-7| \geq 7$ ...(2)
(1) மற்றும் (2) லிருந்து கிடைப்பது,
$7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

14. $3\bar{i} + \frac{1}{2-i} = \frac{60-20i-30i+10i^2}{6^2-(2i)^2} = \frac{60-50i-10}{36+4}$ [$\because$ 3i ன் இணை கலப்பெண் -3i]
$= 3i + \frac{2+1}{2^2-i^2} = -3i + \frac{2+i}{4+1} = -3i + \frac{2+i}{5}$
$\frac{-15i+2+1}{5} = \frac{-14i+2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{14i}{5}$
$= \frac{2}{5} + i\left(\frac{-14}{5}\right)$

15. $-\sqrt{3} - i$
r = 2 மற்றும் $\alpha = \frac{\pi}{6}$
$-\sqrt{3} - i$ என்ற கலப்பெண்ணானது மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு
$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.
ஆகவே, $-\sqrt{3} - i$ - ன் மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு முறையே 2 மற்றும் $-\frac{5\pi}{6}$ ஆகும்.



QB 365 TM Study Material
QUESTION BANK 365

16. $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{107} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{107}$
$\bar{z} = \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{107}} + \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{107}}$
$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^{107} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{107} = z$
ஆதலால் z = $\bar{z}$, Im (z) = 0